Chapitre 13 — Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Support

Commentaires :

On connaissait jusque là (en première année) le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ défini de la manière suivante par exemple si $X=(x_1,x_2), Y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$<X,Y>=x_1y_1+x_2y_2$$

Son utilité était principalement (surtout dans $\mathbb{R}^2$) d'établir des égalités d'angles géométrique ou des orthogonalités entre deux vecteurs. On rappelle à cet effet qu'on avait

$$<X,Y>=0 \quad \Leftrightarrow \quad X\perp Y$$

On peut en fait généraliser cette notions à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. De plus, on (re)verra que ce produit scalaire peut également nous permettre :

- *de faire des calculs de distance*
- *de diagonaliser certaines matrices dans des bases "intéressantes"*
- *d'inverser de manière immédiate certaines matrices*
- *de faire des projections orthogonales sur des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.*

I Généralités

Dans tout ce chapitre, on pose $n\in\mathbb{N}^*$ et notera $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Commençons par généraliser la notion de produit scalaire :

I-1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition

Pour $u,v\in\mathbb{R}^n$ tels que $M_{\mathcal{B}_0}(u)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}_0}(v)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, on appelle *produit scalaire (usuel) de u et v* le nombre

$$<u,v>=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$$

Commentaires :

En réalité, il existe beaucoup d'autres "produits scalaires" sur $\mathbb{R}^n$, d'où le nom ici rajouté de "usuel". (Ces autres produits scalaires sont notamment étudiés dans d'autres classes. Attention donc à ne pas s'éparpiller en allant voir inutilement les cours dans d'autres sections !)
Le produit scalcire usuel (celui que nous étudions) est celui utilisé le plus fréquemment dans les calculs géométriques "classiques". Étant donné que ce sera le seul étudié cette année, on pourra dans ce chapitre oublier le terme "usuel".

■ Exemple 1 :

Dans $\mathbb{R}^4$, Si $u=(\underbrace{1}_{x_1},\underbrace{0}_{x_2},\underbrace{-1}_{x_3},\underbrace{2}_{x_4})$ et $v=(\underbrace{2}_{y_1},\underbrace{3}_{y_2},\underbrace{-1}_{y_3},\underbrace{1}_{y_4})$, on a

$$<u,v>=1\times2+0\times3+(-1)\times(-1)+2\times1=5$$

Remarque :

Avec les notations de la définition ci-avant, remarquons que la formule du produit scalaire "$x_1y_1+\ldots+x_ny_n$" est également issue du **produit matriciel**

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}}_{\text{une seule ligne, } n \text{ colonnes}}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)=\underbrace{(<u,v>)}_{\text{matrice à une ligne, une colonne}}$$

Le résultat est donc une matrice à une ligne et une colonne contenant $<u,v>$.

■ Exemple 2 :

Dans $\mathbb{R}^4$, Si $u=(\underbrace{1}_{x_1},\underbrace{0}_{x_2},\underbrace{-1}_{x_3},\underbrace{2}_{x_4})$ et $v=(\underbrace{2}_{y_1},\underbrace{3}_{y_2},\underbrace{-1}_{y_3},\underbrace{1}_{y_4})$, on a

$$(<u,v>)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+0\times3+(-1)\times(-1)+2\times1\end{pmatrix}=(5)$$

Remarque :

Le résultat du produit matriciel ne contenant qu'un seul élément, on fait l'amalgame entre "matrice" et "nombre" (et donc l'abus de notation) suivant :

$$(<u,v>)=<u,v>$$

D'où

$$\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=<u,v>$$

En notant $U=M_{\mathcal{B}_0}(u)$, $V=M_{\mathcal{B}_0}(v)$, la formule devient donc :

$$\boxed{{}^tUV=<u,v>}$$

où ${}^tU$ est le vecteur "transposé" de U : ${}^tU=\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}$. *(voir ex. ci-dessous)*

■ **Exemple 3** :

Dans $\mathbb{R}^4$, Si $u=(\underbrace{1}_{x_1},\underbrace{0}_{x_2},\underbrace{-1}_{x_3},\underbrace{2}_{x_4})$ et $v=(\underbrace{2}_{y_1},\underbrace{3}_{y_2},\underbrace{-1}_{y_3},\underbrace{1}_{y_4})$, on a

$$U=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

D'où

$$<u,v>={}^tUV=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\1\end{pmatrix}=5$$

Exercice 1

Pour $u=(0,3,-1)\in\mathbb{R}^3$, $v=(1,-1,1)\in\mathbb{R}^3$, calculer $<u,v>$ en passant par l'écriture matricielle.

Commentaires :

Voyons maintenant les quelques propriétés principales du produit scalaire, qui vont nous servir tout au long du chapitre. Elles sont donc à maîtriser.

Proposition 1

Le produit scalaire est :

- bilinéaire ; au sens où, pour tout $u,v,w\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$<u+\alpha v,w>=<u,w>+\alpha<v,w>$$

et

$$<u,v+\alpha w>=<u,v>+\alpha<u,w>.$$

- symétrique ; au sens où

$$<u,v>=<v,u>\qquad\forall u,v\in\mathbb{R}^n$$

- défini positif ; au sens où

$$<u,u>\geqslant 0\qquad\forall u\in\mathbb{R}^n$$

et

$$<u,u>=0\quad\Leftrightarrow\quad u=0$$

Remarque :

Le terme bilinéaire vient du fait que le produit scalaire est linéaire par-rapport à chaque variable. Le comportement est celui d'un développement de parenthèses dans un produit.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^n$, sachant que $||u||^2=1$, $<u,v>=1$, $<v,w>=-1$ et $<u,w>=-1$, vérifier que $<u+w,2v>=0$ ainsi que $<u+w,u+v>=0$.

Définition

On appelle *norme euclidienne* d'un vecteur u le nombre

$$||u||=\sqrt{<u,u>}$$

Remarque :

Dans la base canonique, la formule correspond à

$$||u||=\sqrt{<u,u>}=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

où $u=(x_1,\ldots,x_n)$

Commentaires :

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on sait déjà que ceci correspond en fait à la longueur du vecteur u. C'est le même principe dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi, les propriétés déjà vraies dans $\mathbb{R}^2$ vont se généraliser dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété 2

Si $u\in\mathbb{R}^n$, on a

$$||u||=0\qquad\Leftrightarrow\qquad u=0$$

Théorème 3 *: Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soient $u,v\in\mathbb{R}^n$. On a

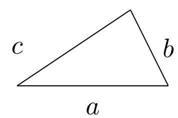
$$|<u,v>|\leqslant||u||\,||v||$$

avec

$$|<u,v>|=||u||\,||v||\qquad\Leftrightarrow\qquad(u,v)\text{ proportionnels}$$

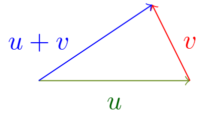
Commentaires :

L'inégalité suivante prise dans $\mathbb{R}^2$ traduit (et justfie) en particulier le fait que dans un triangle, la somme des longeurs de deux des côtés est nécessairement supérieure à la longueur du troisième :



$c\leqslant a+b$ *ou encore* $a\leqslant b+c$ *etc...*

sachant qu'en terme de vecteur, on a



avec alors

$$||u|| = a, \quad ||v|| = b, \quad ||u+v|| = c$$

De manière générale :

Théorème 4 *: Inégalité triangulaire*

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||$$

avec égalité si et seulement si u et v sont propotionnels dans le même sens.

Commentaires :

De la démonstration du théorème précédent, on tire également que la norme de la somme de deux vecteurs peut se calculer de la manière suivante :

Propriété 5

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2 < u, v >$$

Cette propriété peut également (dans de rares cas, si on connait la longueur des trois côtés,) servir à calculer un produit scalaire sans disposer des coordonnées :

$$< u, v >= \frac{1}{2}\left(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right)$$

? Exercice 3

Soit dans $\mathbb{R}^2$ un triangle ABC rectangle en A tel que $||AC|| = 2$, $||AB|| = 1$. Calculer $< \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} >$.
(On remarquera que l'on sait déterminer la longueur de $\overrightarrow{CB}$. On prendra soin de choisir correctement ses vecteurs "u, v" afin de pouvoir appliquer la formule précédente !)
Vous devez trouver le résultat $< \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} >= 4$.

I-2 Changement de base

Commentaires :

Et si les vecteurs u et v ne sont pas donnés dans la base canonique mais dans une base autre $\mathcal{B}$, comment calculer $< u, v >$? A-t-on encore le droit d'utiliser la même formule ?

i.e. Si $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}_0}(v) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, *comment calculer $< u, v >$?*

? Exercice 4

On se donne une base $\mathcal{B} = (\underbrace{(1,1)}_{v_1}, \underbrace{(-1,2)}_{v_2})$ une base de $\mathbb{R}^2$ ainsi que u, v exprimés dans la base $\mathcal{B}$ tels que $u = (-1,1)_{\mathcal{B}}$ et $v = (a,b)_{\mathcal{B}}$. Se ramener à la base canonique pour calculer $< u, v >$
(Vérifiez que vous trouvez $< u, v >= 4b - a$ et non $-a + b$).

Commentaires :

On constate que la formule $\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$ n'est donc pas forcément valide pour calculer le produit scalaire quand on change de base pour exprimer les coordonnées ! Oups ...Cherchons alors,une formule valable dans toutes les bases !

Commençons par observer tout ceci de manière matricielle :
Si les vecteurs sont donnés dans une base nommée $\mathcal{B}$, on peut se ramener à la base canonique grâce à la formule classique de changement de base :

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(u), \qquad M_{\mathcal{B}_0}(v) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(v)$$

Avec les vecteurs obtenus dans la base canonique, on fait le calcul. De plus, $M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$ est en général une matrice facilement identifiable : on n'a pas à inverser.

■ Exemple 4 :

Dans l'exercice ci-dessus : on aurait $M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

et on aurait alors

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_0}(v) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \end{pmatrix}$$

et donc

$$< u, v >= \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \end{pmatrix} = 4b - a$$

Notons que pour ceci, on peut également utiliser la bilinéarité du produit scalaire :

Par exemple, dans l'exercice ci-dessus : $u = -v_1 + v_2,\ v = av_1 + bv_2$
alors

$$\begin{aligned}
< u, v > &= < -v_1 + v_2, av_1 + bv_2 > \\
&= - < v_1, av_1 + bv_2 > + < v_2, av_1 + bv_2 > \text{ (linéarité à gauche)} \\
&= -(a < v_1, v_1 > + b < v_1, v_2 >) + (a < v_2, v_1 > + b < v_2, v_2 >) \text{ (lin. à droite)} \\
&= -a \underbrace{< v_1, v_1 >}_{=2} + (-b + a) \underbrace{< v_1, v_2 >}_{=1} + b \underbrace{< v_2, v_2 >}_{=5} \\
&= -2a + (a - b) + 5b = 4b - a
\end{aligned}$$

? Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ donnés dans la base canonique. Calculer $< u, v >$ où $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ à l'aide de la bilinéarité du produit scalaire.
(Vous devez trouver $< u, v >= 0$.)

Commentaires :

> *Ces deux méthodes permettront toutes deux d'arriver à même une formule générale utilisant une matrice que nous allons d'abord étudier à part.*

Définition

Étant donné une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On appelle *matrice de Gram de la base $\mathcal{B}$*, la matrice des "produits scalaires de $\mathcal{B}$" ci-dessous

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & \ldots & < v_1, v_n > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > & & < v_2, v_n > \\ \vdots & & & \vdots \\ < v_n, v_1 > & \ldots & \ldots & < v_n, v_n > \end{pmatrix} = \left(< v_i, v_j > \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

- **Exemple 5 :**

Pour la base de l'exemple précédent $\mathcal{B} = (\underbrace{(1,1)}_{v_1}, \underbrace{(-1,2)}_{v_2})$ on vu dans les calculs que

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

? Exercice 6

Calculer la matrice de Gram dans l'exercice précédent pour $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

Commentaires :

> *Reprenons l'exemple précédent et voyons grâce à la bilinéarité à quoi peut bien servir cette matrice, mis à part à faire un beau tableau résumé des données !*

Revenons à notre changement de base en méthode matricielle :

Pour des vecteurs donnés dans une base $\mathcal{B}$, on avait revu les formules :

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) M_{\mathcal{B}}(u), \qquad M_{\mathcal{B}_0}(v) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) M_{\mathcal{B}}(v)$$

Pour simplifier, on note :

$$U_0 = M_{\mathcal{B}_0}(u),\ U = M_{\mathcal{B}}(u)$$

les coordonnées respectives de u dans les base canoniques et la base $\mathcal{B}$, (de même pour v,) puis

$$P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \quad \text{la matrice de passage}$$

Les formules deviennent

$$U_0 = PU, \quad V_0 = PV$$

Rappelons maintenant la formule matricielle du produit scalaire dans la base canonique :

$$< u, v >= {}^tU_0 V_0$$

Combinons maintenant les deux en remplaçant $U_0 = PU$ et $V_0 = PV$ dans la ligne ci-dessus :

$$< u, v >= {}^t(PU)PV = {}^tU\,{}^tPPV$$

En posant $G = {}^tPP$, on obtient donc une formule sous forme de produit matriciel

$$< u, v >= {}^t(PU)PV = {}^tUGV$$

que nous allons tester sur un exemple !

- **Exemple 6 :**

Dans l'exemple déjà évoqué dans cette section, avec $\mathcal{B} = (\underbrace{(1,1)}_{v_1}, \underbrace{(-1,2)}_{v_2})$, ainsi que $u = (-1,1)_{\mathcal{B}}$ et $v = (a,b)_{\mathcal{B}}$. Pour $< u, v >$, on peut donc procéder de la manière suivante : On pose la matrice de changement de base

$$P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de transposée :

$${}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule

$$G = {}^tP.P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a donc

$$< u, v >= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.G.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 4b - a$$

Commentaires :

Mais quel est donc le rapport avec la matrice de Gram $G_{\mathcal{B}}$ évoquée précédemment ? ?

Et bien, (les notations sont bien faites ! !) c'est la même :

$$\boxed{G_{\mathcal{B}} = {}^tPP}$$

Voyons ça :

En effet, si on note V_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de P, on sait par définition que

$$V_i = M_{\mathcal{B}_0}(v_i) \quad \text{coordonnées dans la base canonique de } v_i$$

On peut donc d'une part calculer matriciellement $< v_i, v_j >$ avec

$$< v_i, v_j >= {}^tV_iV_j$$

mais si on calcule le produit ${}^tPP$, par formule de calcul sur les produits de matrice, ${}^tV_iV_j$ est exactement le coefficient dans la ligne i, colonne j de la matrice ${}^tPP$. On tombe donc bien sur ${}^tPP = G_{\mathcal{B}}$

Commentaires :

Tout ceci donne donc lieu en général à la formule suivante :

Proposition 6

Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, en notant G la matrice de Gram d'une base $\mathcal{B}$, alors

$$< u, v >= {}^tM_{\mathcal{B}}(u)\ G_{\mathcal{B}}\ M_{\mathcal{B}}(v)$$

? Exercice 7

Reprenons la base de l'exercice précédent : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Calculer $< u, v >$ où $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à l'aide de la méthode matricielle en retrouvant la matrice de Gram à l'aide du calcul $G_{\mathcal{B}} = {}^tPP$.

Remarquons que tout ceci se retrouve par bilinéarité sur un exemple :

■ Exemple 7 :

On avait $\mathcal{B} = (\underbrace{(1,1)}_{v_1}, \underbrace{(-1,2)}_{v_2})$ ainsi que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = (-1, 1)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = (a, b)$, c'est-à-dire :

$$u = -v_1 + v_2, \ v = av_1 + bv_2$$

avec
$$\begin{aligned} < u, v > &= < -v_1 + v_2, v > \\ &= - < v_1, v > + < v_2, v > \text{ (linéarité à gauche)} \end{aligned}$$

Matriciellement on observe alors que c'est le même calcul que

$$< u, v >= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} < v_1, v > \\ < v_2, v > \end{pmatrix}$$

Maintenant, par linéarité à droite sur chaque terme :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} < v_1, v > \\ < v_2, v > \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} < v_1, av_1 + bv_2 > \\ < v_2, av_1 + bv_2 > \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a < v_1, v_1 > + b < v_1, v_2 > \\ a < v_2, v_1 > + b < v_1, v_2 > \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > \end{pmatrix}}_{=G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mis bout à bout, cela donne : $< u, v >= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

II Orthogonalité

II-1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition

Deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont dits *orthogonaux* si $< u, v >= 0$. On note $u \perp v$

Théorème 7 *de Pythagore :*

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$u \perp v \quad \Longleftrightarrow \quad ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

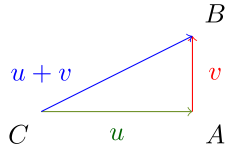
Remarque :

Ce théorème peut se traduire également de la manière bien connue suivante :
Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \quad \iff \quad ||\overrightarrow{BC}||^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2$$

C'est-à-dire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 \qquad :$$



Définition

Une famille $(v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{R}^n$ est appelée *base orthogonale* de l'e.v. $F \subset \mathbb{R}^n$ si :

- $(v_1, \dots, v_s)$ est une base de F
- les vecteurs $v_1, \dots, v_s$ sont deux à deux orthogonaux

Exemple 8 :

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthogonale.

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. On admet que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Définition

Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^n$ est appelée *base orthonormale* (ou *base orthonormée*) de l'e.v. $F \subset \mathbb{R}^n$ si :

- $(u_1, \dots, u_s)$ est une base de F
- les vecteurs $u_1, \dots, u_s$ sont deux à deux orthogonaux   Dans ce cas, on dit que
- les vecteurs $u_1, \dots, u_s$ sont tous de norme 1.

la matrice $P = \mathcal{M}_{B_0}(\mathcal{F})$ est une *matrice orthogonale*.

Exercice 9

Dans l'exercice précédent, montrer que $\mathcal{B}$ n'est pas une base orthonormée.

Remarque :

Pour tranformer une base orthogonale en une base orthonormée, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme.

Exemple 9 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on a vu que la famille $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$ était une base orthogonale,

ainsi la famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthonormée car

$$||v_1|| = \sqrt{3}, \ ||v_2|| = \sqrt{2}, \ ||v_3|| = \sqrt{6}$$

et donc

$$\left|\left| \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 \right|\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} ||v_1|| = 1$$

de même

$$\left|\left| \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \right|\right| = 1, \qquad \left|\left| \frac{1}{\sqrt{6}} v_3 \right|\right| = 1$$

Exercice 10

Soit la base orthogonale (admis pour l'instant) de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$. Déterminer la base orthonormée issue de $\mathcal{B}$.

Remarque :

Une famille de n vecteurs est orthogonale ssi sa matrice de Gram est diagonale.
Une famille de n vecteurs est orthonormée ssi sa matrice de Gram est égale à la matrice identité.

Exemple 10 :

Pour la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, si on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
la matrice de Gram est

$${}^tPP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

c'est donc une famille orthogonale.

■ Exemple 11 :

Pour la famille $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$, la matrice de Gram est

$$^tPP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

c'est donc une famille orthonormée.

Commentaires :

Le sens $\Rightarrow$ de la deuxième équivalence citée dans la remarque précédente :
"Une famille de n vecteurs est orthonormée ssi sa matrice de Gram est égale à la matrice identité." implique notamment que, si $u, v \in \mathbb{R}^n$ et qu'on dispose d'une base $\mathcal{B}$ orthonormée, la formule

$$< u, v >= {}^tM_{\mathcal{B}}(u) \cdot \underbrace{G_{\mathcal{B}}}_{Id} \cdot M_{\mathcal{B}}(v) = {}^tM_{\mathcal{B}}(u)M_{\mathcal{B}}(v)$$

Autrement dit, si

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$$

Alors

$$< u, v >= \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$$

Ceci signifie que la formule est la même que si on était dans la base canonique :

Propriété 8

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_0$ la base canonique. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}_0}(v) = \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$$

Alors

$$\underbrace{< u, v >= x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}_{\text{formule de définition}} = \underbrace{\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n}_{\text{formule du commentaire précédent}}$$

ainsi que par suite :

$$||u||^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$$

Commentaires :

Cette propriété signifie que la formule du produit scalaire est applicable quelquesoit la base ***orthonormée*** *dans laquelle on se trouve, et pas seulement dans la base canonique. Ceci permet même de ne pas connaître la base $\mathcal{B}$ en détail !*

■ Exemple 12 :

Supposons que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$. Calculer le produit scalaire de $u = (1, 0, -2, 1)_{\mathcal{B}}$ et $v = (0, 2, 1, 1)_{\mathcal{B}}$.

La base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, on a

$$< u, v >= 1 \times 0 + 0 \times 2 + (-2) \times 1 + 1 \times 1 = -1$$

Commentaires :

Cette propriété permet ainsi de démontrer très facilement le rapport entre angle et produit scalaire :

Corollaire

Dans $\mathbb{R}^2$, si θ est l'angle (géométrique) entre les vecteurs u et v, on a bien

$$< u, v >= ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\theta$$

Commentaires :

Si on observe deux vecteurs non nuls orthogonaux dans $\mathbb{R}^2$, graphiquement, on voit bien qu'ils sont non colinéaires et donc forment une famille libre. Dans ce cas, dire qu'une famille est constituée de deux éléments orthogonaux suffirait à justifier que c'est une base. Nous allons voir que ce principe se généralise à $\mathbb{R}^n$:

Théorème 9

Si $(v_1, \ldots, v_r)$ est une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux, alors c'est une famille libre.

Corollaire

Si $(v_1, \ldots, v_s)$ est une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux dans $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\dim F = s$, alors c'est une base de F.

■ Exemple 13 :

Reprenons la famille $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$. On demande de montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Notons P la matrice de coordonnées de $\mathcal{B}$ dans la base canonique. Alors

$$P = \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

On calcule la matrice de Gram de P : $\quad {}^tPP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

La matrice est diagonale. On en déduit que c'est une famille orthogonale, de plus on a trois éléments dans $\mathcal{B}$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

? Exercice 11

Montrer que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Commentaires :

Une conséquence de tout ceci est qu'il existe certaines matrices pour lesquelles l'inversibilité est immédiate et pour lesquelles le calcul de l'inverse n'est qu'une formalité :

Corollaire

On se donne P une matrice carrée.

- *Si les vecteurs colonnes de P forment une famille de vecteurs 2 à 2 orthogonaux (i.e. ${}^tPP$ est diagonale), alors :*
  P est inversible
- *Si de surcroît les vecteurs sont orthonormés (i.e. ${}^tPP = Id$), alors*
  P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$

■ Exemple 14 :

Montrons que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible.

La matrice de Gram des vecteurs colonnes est
$G = {}^tPP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
Cette matrice étant diagonale, on en déduit que les vecteurs de P forment une famille libre et que P est inversible. (Mais ATTENTION, on n'a pas l'inverse pour autant !)
L'inverse de P est en fait

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

■ Exemple 15 :

Montrons que la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ est inversible.

C'est une base orthonormée, donc P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$

II-2 ■ Traduction des formules de changement de base dans une base orthonormée

Commentaires :

Si on se donne une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, on rappelle que la formule générale de changement de base pour un vecteur u donné dans la base $\mathcal{B}_0$ (par exemple la base canonique) est

$$M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0) M_{\mathcal{B}_0}(u)$$

où l'on sait que

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0) = \underbrace{M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})}_{\text{notée } P}{}^{-1} = P^{-1}$$

Nous avons vu que si la base était orthonormée, alors

$$P^{-1} = {}^tP$$

La formule se transforme donc en

$$M_{\mathcal{B}}(u) = {}^tP M_{\mathcal{B}_0}(u)$$

? Exercice 12

Soit $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Déterminer dans cette base orthonormée les coordonnées du vecteur $u = (1, -1, 1)$ à l'aide de la remarque précédente.

Commentaires :

Il existe également une autre manière de procéder directement avec les produits scalaires, qui va nous permettre un peu plus tard dans le chapitre de faire des projections orthogonales :

Propriété 10

Si $(u_1, \dots, u_s)$ est une base orthonormée de $F \subset \mathbb{R}^n$, alors, pour tout $u \in F$, on a

$$u = < u, u_1 > u_1 + \ldots + < u, u_s > u_s$$

Commentaires :

Ceci signifie qu'on a "directement" $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} <u, u_1> \\ \vdots \\ <u, u_n> \end{pmatrix}$

où on a noté $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$.

■ Exemple 16 :

Soit $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1, -1, 1)$ à l'aide de la propriété précédente.

On sait déjà que la base est orthonormée. On peut donc appliquer la formule de la propriété précédente, sous réserve de calculer les 3 produits scalaires en question. Si on note U, U_i les vecteurs représentant respectivement u, u_i dans la base canonique, on a

$$<u, u_1> = {}^tU.U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

et

$$<u, u_2> = 0 \qquad ; \qquad <u, u_3> = -\frac{4}{\sqrt{6}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

En conclusion,

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(u_1 - 2\sqrt{2} u_3 \right)$$

? Exercice 13

Dans la base orthonormée $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, déterminer les coordonnées de $u = (1, 1, 1)$.

Remarque :

Les trois produits scalaires de l'exemple précédent ont été obtenus en calculant ${}^tU \cdot U_i$. Rappelons que le produit scalaire est symétrique et ainsi que

$${}^tU \cdot U_i = <u, u_i> = <u_i, u> = {}^tU_i \cdot U$$

Les trois lignes du vecteur colonne $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} <u, u_1> \\ <u, u_2> \\ <u, u_3> \end{pmatrix}$ sont donc issues du calcul de ${}^tU_i \cdot U$. C'est exactement la même chose que de dire que la colonne précédente a été obtenue en une seule fois par le calcul

$$M_{\mathcal{B}}(u) = {}^tP \cdot U$$

ce qui revient donc exactement au même que de dire que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = {}^tP M_{\mathcal{B}_0}(u)$$

ce qui était la formule annoncée au début du paragraphe. (Ouf!!)

Moralité : *pour ce calcul là, on peut choisir indifféremment l'une ou l'autre technique, il n'y a pas de différence de temps de calcul.*

Commentaires :

Que faire maintenant si la base n'est pas orthonormée, mais "simplement" orthogonale. On a vu précédemment que toute base orthogonale pouvait donner lieu à une autre base orthonormée en divisant chaque vecteur par sa norme. Si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ *est alors une base orthogonale, ceci signifie que* $\left(\frac{v_1}{||v_1||}, \dots, \frac{v_n}{||v_n||} \right)$ *est une base orthonormée. On peut facilement passer de l'une à l'autre de la façon suivante : Si on note* $u_i = \frac{v_i}{||v_i||}$, *la propriété précédente nous dit que la formule de décomposition dans la base* $(u_1, \dots, u_n)$ *donne :*

$$u = <u, u_1> u_1 + \ldots + <u, u_n> u_n$$

Or, on a $u_i = \frac{v_i}{||v_i||}$, *d'où, en remplaçant dans la formule ci-dessus :*

$$u = <u, \frac{v_1}{||v_1||}> \frac{v_1}{||v_1||} + \ldots + <u, \frac{v_n}{||v_n||}> \frac{v_n}{||v_n||}$$

mais les $||v_i||$ *ne sont que des scalaires, ils peuvent donc être sortis du produit scalaire :*

$$u = <u, v_1> \frac{1}{||v_1||} \frac{v_1}{||v_1||} + \ldots + <u, v_n> \frac{1}{||v_n||} \frac{v_n}{||v_n||}$$

ce qui, en simplifié, donne

$$u = \underbrace{\frac{<u, v_1>}{||v_1||^2}}_{\alpha_1} v_1 + \ldots + \underbrace{\frac{<u, v_n>}{||v_n||^2}}_{\alpha_n} v_n$$

Ainsi, les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *sont les coefficients de* u *dans la base* $(v_1, \dots, v_n)$, *alors que les* $<u, u_i>$ *sont les coefficients de* u *dans la base* $(u_1, \dots, u_n)$. *Nous venons en fait de faire la démonstration du corollaire ci-dessous :*

Corollaire

Si $(v_1, \dots, v_s)$ *est une base orthogonale de* $F \subset \mathbb{R}^n$, *alors, pour tout* $u \in F$, *on a*

$$u = \frac{<u, v_1>}{||v_1||^2} v_1 + \ldots + \frac{<u, v_s>}{||v_s||^2} v_s$$

■ Exemple 17 :

Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right) = (v_1, v_2, v_3)$.

Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1, -1, 1)$

Ayant déjà fait le calcul, on sait que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale. Ainsi,

$$u = < u, v_1 > \frac{v_1}{||v_1||^2} + < u, v_2 > \frac{v_2}{||v_2||^2} + < u, v_3 > \frac{v_3}{||v_3||^2}$$

Or,

$$< u, v_1 >= {}^tM_{\mathcal{B}_0}(u).M_{\mathcal{B}_0}(v_1) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1$$

puis de la même manière

$$< u, v_2 >= 0 \qquad ; \qquad < u, v_3 >= -4$$

En conclusion,

$$u = \frac{v_1}{3} - 4 \cdot \frac{v_3}{6} = \frac{1}{3}(v_1 - 2v_3)$$

Remarque :

Pour cette base là, on ne PEUT PAS appliquer de formule du type ${}^tPU$ car dans la formule du changement de base, la matrice P n'est PAS d'inverse ${}^tP$.

? Exercice 14

Dans la base orthogonale $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$, déterminer les coordonnées de $u = (1, 1, 1)$.

II-3 Diagonalisation dans une base orthonormée

Commentaires :

Cette partie va concerner la diagonalisation de matrice. Nous allons voir que dans certains cas de matrices, on peut systématiquement obtenir une matrice diagonale, de surcroit dans une base très pratique.

Théorème 11 *spectral*

Toute matrice A **symétrique réelle** *est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres au sens suivant :*
il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice P de vecteurs propres orthonormés et deux à deux orthogonaux telle que

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{avec } P^{-1} = {}^tP$$

■ Exemple 18 :

Soit $M = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\2 & -1 & 1\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Sans faire de calcul, on voit que cette matrice est symétrique et RÉELLE, on sait alors que cette matrice est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres. (Mais en revanche, on ne sait pas lesquels)

On peut le vérifier par calcul :

$$Sp(M) = \{2, \sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$$

et les espaces propres sont :

$$E_2 = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_{\sqrt{7}} = Vect\left(\begin{pmatrix}1-\sqrt{7}\\\sqrt{7}-3\\2\end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_{-\sqrt{7}} = Vect\left(\begin{pmatrix}1+\sqrt{7}\\-\sqrt{7}-3\\2\end{pmatrix}\right)$$

Les trois vecteurs sont bien 2 à 2 orthogonaux.

Corollaire

Les espaces propres d'une matrice ***symétrique réelle*** *sont deux à deux orthogonaux.*

Importance des hypothèses !

Les matrices diagonalisables qui ne sont pas symétriques ou non réelles, ne sont pas nécessairement diagonalisables dans une base orthonormée (ni même orthogonale.)

■ Contre-Exemple(s) :

La matrice réelle $M = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 4 & -2\\3 & 6 & -5\end{pmatrix}$ **non symétrique** est diagonalisable de valeur propre $0, -4, 4$ dans une base de vecteurs propres $\left(\begin{pmatrix}1\\-1/2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

(Faire le calcul pour s'entraîner)

Mais cette base n'est pas du tout orthogonale et il n'existe pas d'autre base de vecteurs propres pouvant être diagonale. *(à méditer)*...

Et si la matrice n'est pas réelle ?
De la même façon, l'hypothèse "matrice réelle" est importante également :

Contre-Exemple(s) :

Prenons la matrice **non réelle** mais **symétrique** $M = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et cherchons des valeurs propres :

(Petite astuce au passage :) Comme il s'agit d'une matrice d'ordre 2, on êut utiliser le déterminant de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ vap} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(M - \lambda Id) < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad M - \lambda Id \text{ non inversible} \quad \Leftrightarrow \quad det(M - \lambda Id) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'une seule valeur propre, c'est 1. Or, on a déjà vu lors d'un exercice précédent que ce type de configuration ne pouvait donner lieu à une matrice diagonalisable.
En conclution, $\boxed{M \text{ est une matrice symétrique mais non diagonalisable...}}$

III Distance et projections orthogonales

Commentaires :

Cette dernière partie du cours va nous donner des formules qui permettent de calculer ds coordonnées de projections ainsi que des distances dans des espaces $\mathbb{R}^n$ de manière immédiate grâce à des produits scalaires.

Définition

On appelle *distance* entre les deux vecteurs (ou points) $u, v \in \mathbb{R}^n$ le nombre $||u - v||$.

Définition et Proposition

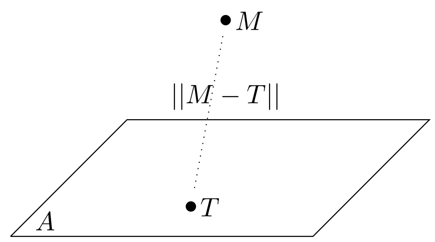
Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et $M \in \mathbb{R}^n$. Il existe un nombre d tel que

$$\{||M - a|| \mid a \in A\} \qquad \text{soit minimal}$$

On appelle alors *distance de M à A* le nombre

$$d(M, A) = \inf\{||M - a|| \mid a \in A\}$$

Explications sur un exemple :
Prenons par exemple un plan A dans $\mathbb{R}^3$, M un point de $\mathbb{R}^3$ non compris dans A. On regarde toutes les distances $||M - T||$ avec T qui varie dans A :



On prend ensuite la plus petite de ces valeurs, et on affirme alors que c'est la distance entre M et le plan A.

Commentaires :

Voyons dans la suite comment obtenir des formules pour cette distance si A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Pour commencer, on va la caractériser par des projections orthogonales. Il faut donc commencer par définit ce qu'est une "projection orthogonale".

Définition

Un vecteur u est *orthogonal à un espace F* si u est orthogonal à tout vecteur de F. On note $u \perp F$.

Définition

Pour tout sev $F \subset \mathbb{R}^n$, on note $F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \perp F\}$,i.e. $F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \perp v \ \forall v \in F\}$. On appelle cet espace *l'orthogonal de F.*

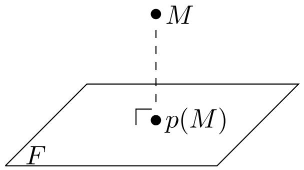
Définition

On appelle *projection orthogonale* **sur un sous-espace vectoriel** F de $\mathbb{R}^n$ un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} \bullet \quad p(u) \in F & \forall u \in \mathbb{R}^n \\ \bullet \quad p(u) - u \perp F & \forall u \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où $p(u) - u \perp F$ signifie que $p(u) - u \perp v$ pour tout $v \in F$.

Explications sur un exemple :
Reprenons par exemple un plan F dans $\mathbb{R}^3$, M un point de $\mathbb{R}^3$ non compris dans F. Graphiquement, la projection orthogonale se présente comme suit :



$p(M) \in F$ et l'angle droit signifie que $(p(M) - M) \perp F$.

Théorème 12

Si F est un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique projection orthogonale sur F.

Démonstration : admise. □

Remarque :

$\boxed{\text{Si } u \in F, \text{ alors } p(u) = u}$:

Graphiquement, sur le schéma précédent, on peut bien observer ce phénomène : si M est dans le plan A, alors $p(M)$ est confondu avec M.
De manière générale : si $u \in F$, alors $< u - u, v >= 0 \quad \forall v \in F$, d'où $u - u \perp F$.
Les conditions sont donc remplies pour que $u = p(u)$ par définition de la projection et par unicité de la projection.

Corollaire

Pour tout sev $F \subset \mathbb{R}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique décomposition $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ telle que

$$x = x_F + x_{F^\perp}$$

(x_F est la projection orthogonale de x sur F.)

Remarque :

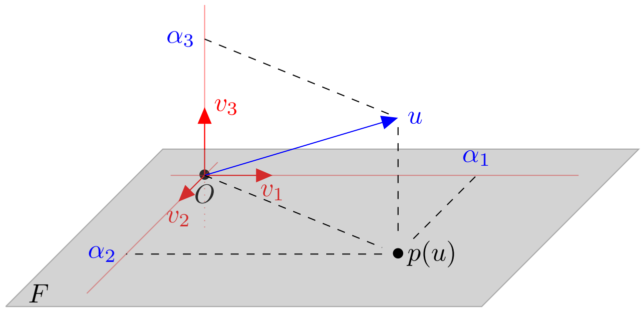
Si un vecteur u est exprimé dans une base orthogonale relative à l'espace F sur lequel on projette, alors l'expression de la projection est triviale :

Propriété 13

Soit $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ et $F = Vect(v_1, \ldots, v_s)$.
Si p est une projection orthogonale sur F et que $M_\mathcal{B}(u) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, alors

$$p(u) = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_s v_s, \quad i.e. \quad M_\mathcal{B}(p(u)) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s, 0, \ldots, 0).$$

Explications sur un exemple : Reprenons par exemple sev de dimension 2 F dans $\mathbb{R}^3$, u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ non compris dans F. Graphiquement, dans le repère orthogonal (v_1, v_2, v_3), où $F = Vect(v_1, v_2)$, la projection orthogonale se présente comme suit :



où on observe bien que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

et ensuite que sa projection est

$$p(u) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

on a donc simplement retiré la partie en v_3 pour obtenir $p(u)$ à partir de u.

Commentaires :

Ceci signifie en fait que pour trouver la projection orthogonale d'un vecteur sur F, on "garde les coordonnées" dans F et on "retire" celles qui sont orthogonales à F.

Quand le vecteur est exprimé dans une base adéquate, le projeté est donc immédiat (cf exemple ci-dessous)

■ **Exemple 19 :**

Soit $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ la base orthogonale (de vecteurs notés respectivement (v_1, v_2, v_3)) que nous avons étudiée lors des diverses exemples de ce chapitre.
On pose $A = Vect(v_1, v_2)$ (plan de $\mathbb{R}^3$).
Soit

$$u = (2, -1, 3)_\mathcal{B} = 2v_1 - v_2 + 3v_3$$

Comme la base $\mathcal{B}$ est orthogonale, alors la projection de u sur le plan A est

$$p(u) = (2, -1, 0)_\mathcal{B} = 2v_1 - v_2$$

Commentaires :

Mais qu'advient-il si u n'est pas exprimé dans une telle base ?

Théorème 14

Si p est une projection orthogonale sur un sev F de $\mathbb{R}^n$ et que $(u_1, \ldots, u_s)$ est une base orthonormée de F, alors, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a

$$p(u) = < u, u_1 > u_1 + \ldots + < u, u_s > u_s$$

Corollaire

Si p est une projection orthogonale sur un sev F de $\mathbb{R}^n$ et que $(v_1, \ldots, v_s)$ est une base orthogonale de F. Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a

$$p(u) = \frac{< u, v_1 >}{||v_1||^2} v_1 + \ldots + \frac{< u, v_s >}{||v_s||^2} v_s$$

■ Exemple 20 :

Soit $F = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Déterminons les coordonnées de la projection orthogonale de $u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sur F.

La base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ de F donnée ci-dessus étant orthogonale, on utilise simplement la formule

$$p(u) = \frac{< u, v_1 >}{||v_1||^2} v_1 + \frac{< u, v_2 >}{||v_2||^2} v_2$$

i.e.

$$p(u) = \frac{1}{3} v_1 + \frac{1}{2} v_2$$

et donc

$$p(u) = \frac{1}{6}(5, 2, -1)$$

Commentaires :

Voici ci-dessous quelques propriétés des projections que nous expliquerons juste après

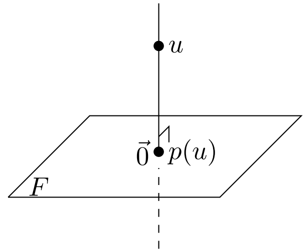
Propriété 15

Si p est une projection orthogonale sur un sev F de $\mathbb{R}^n$, alors

$$p \circ p = p \quad ; \quad \mathfrak{Im}\, p = F \quad ; \quad p(u) = \vec{0} \quad \forall u \perp F$$

Commentaires :

- $p \circ p = p$ signifie que si on projette et qu'on recommence la projection, on ne bouge pas. En effet, $H = p(M)$ est déjà sur F, donc recommencer revient donc à dire que $p(H) = H$.
- $\mathfrak{Im}\, p \subset F$ car on projette sur F, mais tout élément de F peut être considéré comme une projection.
- tous les éléments orthogonaux à F seront d'image nulle :



Commentaires :

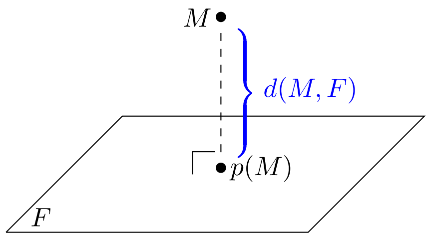
Finalement, voyons quel rapport a cette projection avec nos calculs de longueurs et comment nous allons pouvoir établir des formules de calcul. En premier lieu, la distance entre un point M et un sev F est donné grâce à la projection de M de la façon suivante :

Théorème 16

Si F est un sev de $\mathbb{R}^n$, pour tout point $M \in \mathbb{R}^n$ on a

$$d(M, F) = ||M - p(M)||$$

où p est la projection orthonormale sur F.



Commentaires :

Venons en maintenant à ces fameuses formules de calcul de distance données dans deux cadres : soit on dispose d'une base orthormée de F, soit seulement d'une base orthogonale.

Corollaire

Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ avec $(u_1, \dots, u_s)$ base de F, on a

$$d(M,F)^2 = ||\sum_{i=s+1}^{n} < M, u_i > u_i||^2 = \sum_{i=s+1}^{n} < M, u_i >^2$$

- **Exemple 21** :

Soit $F = Vect\big((1,1,1),(1,0,-1)\big)$. Déterminer $d(M,F)$ avec $M = (2,3,-1)$.

Les vecteurs $(1,1,1),(1,0,-1)$ sont orthogonaux. Une base orthogonale de l'espace est par exemple $\mathcal{B} = \big((1,1,1),(1,0,-1),(-1,2,-1)\big)$ (déjà vu précédemment) et une base orthonormée est $\mathcal{B} = \big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}_{u_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)}_{u_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)}_{u_3}\big)$ Ainsi,

$$d(M,F)^2 = < M, u_3 >^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2$$

et donc

$$d(M,F) = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

Corollaire

Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ avec $(v_1, \dots, v_s)$ base de F, on a

$$d(M,F)^2 = ||\sum_{i=s+1}^{n} < M, \frac{v_i}{||v_i||} > \frac{v_i}{||v_i||}||^2 = \sum_{i=s+1}^{n} < M, \frac{v_i}{||v_i||} >^2 = \sum_{i=s+1}^{n} \frac{< M, v_i >^2}{||v_i||^2}$$

- **Exemple 22** :

Soit $F = Vect\big((1,1,1),(1,0,-1)\big)$. Déterminer $d(M,F)$ avec $M = (2,3,-1)$.

Les vecteurs $(1,1,1),(1,0,-1)$ sont orthogonaux. Une base orthogonale de l'espace est par exemple $\mathcal{B} = \big(\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,0,-1)}_{v_2}, \underbrace{(-1,2,-1)}_{v_3}\big)$ (déjà vu précédemment) Ainsi,

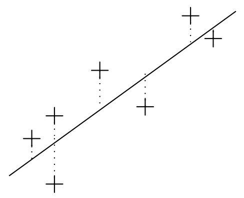
$$d(M,F)^2 = \frac{< M, v_3 >^2}{||v_3||^2} = \frac{5^2}{6}$$

et donc

$$d(M,F) = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

Cas particulier : Principe des moindres carrés et projection

On considère un nuage de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,n}$. On note $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On rappelle que le principe des moindre carrés consiste à déterminer une droite (d'équation $y = ax + b$) se rapprochant le plus possible du nuage au sens "vertical", c'est-à-dire de trouver des coefficients a, b tels que $\sum_{k=1}^{n} ||y_i - ax_i - b||^2$ soit le plus petit possible :



(i.e. on veut ici minimiser globalement les normes des parties en pointillés.)
On remarque que si on pose $U = (1 \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, pour $v = aX + bU$, on a

$$||Y - v||^2 = \sum_{k=1}^{n} ||y_i - ax_i - b||^2$$

La problématique consiste donc en réalité à trouver le point $v \in F = Vect(X, U)$ tel que $||Y - v||^2$ soit le plus petit possible. D'après le théorème précédent, c'est la projection de Y sur F. Autrement dit :

$$\boxed{\text{La droite est optimale ssi } aX + bU = p_{Vect(X,U)}(Y)}$$

? Exercice 15

On considère le nuage de points associé aux données suivantes :

X	1	2	-2	1	-3
Y	0	-1	3	2	-2

1. Montrer que $\mathcal{B}' = \{(1, \dots, 1), (6, 11, -9, 6, -14)\}$, est une base othogonale de $F = Vect(X, U)$ (où on utilise les notations de l'explication ci-dessus.)

2. Déterminer les coefficients de la droite de régression associée aux données par la méthode des moindres carrés grâce à la méthode citée ci-dessus.